Научная статья

УДК 512.577+512.548.2+512.534.2
DOI 10.25205/1560-750X-2024-27-1-73-95

ОБ АЛЬТЕРНИРУЮЩИХ ПОЛУГРУППАХ ЭНДОМОРФИЗМОВ ГРУППОИДА

Андрей Викторович Литаврин

Сибирский федеральный университет
660041, Красноярск, Россия

anm11@rambler.ru

Аннотация

В работе изучаются биполярные типы композиции пары эндоморфизмов группоида. Вводится понятие альтернирующей пары эндоморфизмов группоида. Для таких пар установлена формула для вычисления биполярного типа композиции с помощью биполярных типов эндоморфизмов входящих в композицию. Вводятся альтернирующие и специальные альтернирующие полугруппы эндоморфизмов группоида. Любые два эндоморфизма из альтернирующей полугруппы эндоморфизмов образуют альтернирующую пару. Показано, что базовое множество эндоморфизмов первого типа является специальной альтернирующей полугруппой с единицей (т.е. моноидом) для любого группоида G. Установлено, что всякая специальная альтернирующая полугруппа эндоморфизмов группоида G будет изоморфна некоторой специальной альтернирующей полугруппе группоида G', если G' и G – изоморфные группоиды.

Ключевые слова и фразы

эндоморфизм группоида, группоид, базовое множество эндоморфизмов, монотипные полугруппы эндоморфизмов, мультитипные полугруппы эндоморфизмов, альтернирующие полугруппы эндоморфизмов, специальные альтернирующие полугруппы эндоморфизмов, биполярный тип комозиции .

Источник финансирования

Работа выполнена при поддержке Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение 075-02-2023-936)

Для цитирования

Литаврин А. В. Об альтернирующих полугруппах эндоморфизмов группоида // Математические труды, 2024, Т. 27, № 1, С. 73-95. DOI 10.25205/1560-750X-2024-27-1-73-95

ON ALTERNATING SEMIGROUPS OF ENDOMORPHISMS OF A GROUPOID

Andrey V. Litavrin

Siberian Federal University, 660041, Krasnoyarsk, Russia

anm11@rambler.ru

Abstract

The bipolar types of composition of a pair of endomorphisms of a groupoid are studied in this work. The notion of an alternating pair of endomorphisms of a groupoid is introduced. For such pairs, a formula is established for calculating the bipolar type of a composition using the bipolar types of endomorphisms included in the composition. Alternating and special alternating semigroups of endomorphisms of a groupoid are introduced. Any two endomorphisms from an alternating endomorphism semigroup form an alternating pair. It is shown that the basic set of endomorphisms of the first type is a special alternating semigroup with identity (that is, a monoid). We study the connection between special alternating endomorphism semigroups of two isomorphic groupoids G and G'. It is established that every special alternating semigroup of endomorphisms of the groupoid G is isomorphic to some special alternating semigroup of the groupoid G'.

Keywords

groupoid endomorphism, groupoid, base set of endomorphisms, monotypic endomorphism semigroups, multitype semigroups of endomorphisms, alternating groupoid endomorphism semigroups, special alternating endomorphism semigroups, bipolar type of composition.

Funding

The work was carried out with the support of the Krasnoyarsk Mathematical Center, funded by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (Соглашение 075-02-2023-936)

For citation

Litavrin A. V. On alternating semigroups of endomorphisms of a groupoid // Mat. Trudy, 2024, V. 27, no. 1, pp. 73-95. DOI 10.25205/1560-750X-2024-27-1-73-95

§ 1. Введение и постановка задачи

Работа посвящена изучению эндоморфизмов группоида и является продолжением работы [1], которая была индуцирована интересом к изучению следующей общей проблеме

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 1, С. 73-95
Mat. Trudy, 2024, vol. 27, no. 1, pp. 73-95

Проблема 1. *Для некоторого группоида G привести поэлементное описание моноида всех эндоморфизмов.*

Под поэлементным описанием понимается описание эндоморфизмов как преобразований множества G. В литературе имеется много примеров исследований аналогичной проблемы для группы всех автоморфизмов. Так в работах [2], [3] решается проблема вычисления группы всех автоморфизмов для унипотентных подгрупп групп Шевалле.

Проблема 1 для матричных полугрупп обратимых матриц с неотрицательными элементами над упорядочеными или частично упорядочеными кольцами рассматривается в работах [4], [5], [6] и [7].

В не контекста проблемы 1 изучаются эндоморфизмы различных алгебраических систем. Например, интенсивно изучались кольца эндоморфизмов абелевых групп. Ознакомиться с этим обширным направлением исследований можно с помощью работы [8].

Исследования, направленные на нахождение качественных свойств эндоморфизмов (как преобразований) и полугрупп эндоморфизмов (в частности, групп автоморфизмов), можно считать близкими к исследованию проблемы 1. Результаты таких исследований для конкретных группоидов (или классов группоидов) могут быть полезны при решение проблемы 1 или представлять самостоятельный интерес. Полугруппы эндоморфизмов свободных произведений некоторых полугрупп изучались в [9]. Для линейных и алинейных квазигрупп эндоморфизмы исследовались в работе [10], группы автоморфизмов конечноопределенных квазигрупп исследовались в [11]. Эндоморфизмы группы автоморфизмов свободной группы исследовались в работе [12].

Изучались автоморфизмы группоидов, которые в общем случае не относятся к квазигруппам и полугруппам. Примеры таких исследований можно найти в работах [13], [14], [15] и др.

Проблема 1 естественным образом связана с другой общей проблемой

Проблема 2. *Для некоторого группоида G привести поэлементное описание всех подгруппоидов.*

Действительно, для всякого эндоморфизма ϕ группоида G образ $\phi(G)$ является подгруппоидом в группоиде G. Поэтому решение проблемы 1 для группоида G дает набор (в общем случае, не всех) подгруппоидов группоида G.

В контексте проблемы 2 особый интерес представляет собой решение проблемы 1 для некоторых конкретных группоидов, связанных с многослойными нейронными сетями. В работах [16] и [17] каждой нейронной сети $\mathcal{N}$ ставится в соответствие коммутативный (но в общем случае не ассоциативный) группоид $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$ элементы которого связаны с подсетями нейронной сети $\mathcal{N}$. Данные работы направлены на изучение структуры (внутреннего устройства) многослойной нейронной сети алгебраическими методами. Остается открыта проблема 1 для группоида $\mathrm{AGS}(\mathcal{N})$, когда число слоев $\mathcal{N}$ больше 2 (см. задача 2 из [16]).

Таким образом, проблема 1 рассматривается для различных группоидов. Это подчеркивает актуальность разработки методов исследования моноида всех эндоморфизмов для произвольного группоида.

В работе [1] было установлено, что моноид всех эндоморфизмов произвольного группоида раскладывается в объединение попарно непересекающихся множеств специального вида, которые получили название *базовых множеств эндоморфизмов* (см. определение 3 из [1]) группоида. Каждое базовое множество эндоморфизмов $D(\gamma)$ группоида G определяется некоторым подходящим отображением $\gamma : G \to \{1, 2\}$, данное отображение в работе [1] получает название *биполярный тип* эндоморфизмов или просто *тип* эндоморфизмов (см. определения 1 из [1]).

Поскольку базовые множества эндоморфизмов различных типов имеют пустое пересечение (см. теорема 1 из [1]), то каждому эндоморфизму $\alpha \in D(\gamma)$ можно присвоить свой тип γ (см. определения 5 из [1]). Данное присвоение типов приводит к классификации эндоморфизмов данного группоида, которая в работе [1] получает название *биполярной классификации эндоморфизмов.*

Похожие результаты были получены в [18] для антиэндоморфизмов произвольного группоида (строятся некоторые монотипные полугруды антиэндоморфизмов группоида).

Основные результаты работы. Естественный интерес вызывает задача, состоящая в нахождении биполярного типа композиции пары эндоморфизмов с помощью биполярных типов сомножителей. В данной работе установлено, что декартов квадрат $\mathrm{End}(G) \times \mathrm{End}(G)$ можно разложить на два не пересекающихся класса пар эндоморфизмов: *альтернирующие пары* (см. определение 2) и неальтернирующие пары. Для альтернирующих пар эндоморфизмов можно выразить биполярный тип композиции через биполярные типы эндоморфизмов, входящих в эту пару, с помощью равенства (10). Данный результат сформулирован в виде теоремы 2.

Показано (см. пример 1), что равенство (10) не выполняется для неальтернирующих пар. И проиллюстрирована сложность нахождения общих закономерностей, позволяющих находить биполярный тип композиции с помощью биполярных типов сомножителей.

Базовые множества эндоморфизмов в общем случае не обязаны быть замкнутыми относительно композиции. При этом в работе [1] для каждого группоида были построены полугруппы эндоморфизмов, которые целиком содержаться в некотором базовом множестве. Для некоторых группоидов данные полугруппы вырождаются в пустое множество. Для каждого группоида G был построен моноид $\mathrm{Motend}(A, G)$, состоящий из эндоморфизмов первого типа; построена полугруппа $\mathrm{Motend}(\Omega, G)$, состоящая из эндоморфизмов второго типа, и для каждого смешанного типа γ была построена полугруппа $\mathrm{Motend}(\gamma, G)$.

Данные полугруппы, являются частным случаем монотипных полугрупп эндоморфизмов (т.е. полугрупп, состоящих из эндоморфизмов одного типа). В работе [1] показано, что перечисленными конструкциями список монотипных полугрупп не исчерпывается. Полугруппу эндоморфизмов, которая имеет эндоморфизмы разных типов естественно называть *мультитипной полугруппой* эндоморфизмов.

В данной работе для произвольного группоида G и произвольных совокупностей $\mathcal{F}$ базовых множеств эндоморфизмов группоида G строится полугруппа эндоморфизмов $\mathrm{Altend}(\mathcal{F}, G)$, которая в данной работе получает название *специальной альтернирующей полугруппой эндоморфизмов* (см. определение 4 и теорему 3). Данные полугруппы эндоморфизмов могут быть как монотипные (когда $\mathcal{F}$ содержит только одно базовое множество эндоморфизмов) так и мультитипные. Поскольку любые два эндоморфизма из $\mathrm{Altend}(\mathcal{F}, G)$ образуют альтернирующую пару, то биполярный тип композиции может быть вычислен с помощью теоремы 2.

Теорем 4 показывает, что базовое множество эндоморфизмов первого типа $D(A)$ совпадает с множествами $\mathrm{Altend}(\{D(A)\}, G)$ и $\mathrm{Motend}(A, G)$ для любого группоида G, следовательно, $D(A)$ – моноид.

Для каждого изоморфизма $\zeta : G \to G'$ группоидов G и G' можно определить отображение $\zeta_e : \mathrm{End}(G) \to \mathrm{End}(G')$ с помощью равенства преобразований $\zeta_e(\alpha) = \zeta \cdot \alpha \cdot \zeta^{-1}$. Данное отображение будет являться изоморфизмом моноидов $\mathrm{End}(G)$ и $\mathrm{End}(G')$. В работе изучается ζ_e-образ специальной альтернирующей полугруппы $\mathrm{Altend}(\mathcal{F}, G)$. Оказывается этот образ сам будет являться специальной альтернирующей полугруппой $\mathrm{Altend}(\mathcal{F}', G')$ в моноиде $\mathrm{End}(G')$ для подходящей системы $\mathcal{F}'$ базовых множеств эндоморфизмов группоида G'. Результат сформулирован в виде теоремы 5, в ней же указан конкретный вид системы $\mathcal{F}'$.

Основные результаты данной статьи сформулированы в виде теорем 2, 3, 4 и 5.

§ 2. Обозначения и предварительные сведения

Симметрическую полугруппу всех преобразований множества G будем обозначать через $I(G)$. Если α_1, α_2 – преобразование из $I(G)$, то их композицию $(\cdot)$ будем определять равенством

$$(\alpha_1 \cdot \alpha_2)(g) = \alpha_1(\alpha_2(g))$$

для любого $g \in G$. В данной работе эндоморфизмы и их композиции специальных обозначений не имеют и рассматриваются в обозначениях симметрической полугруппы.

Пусть $G = (G, *)$ – некоторый группоид. Для всякого x из G через h_x будем обозначать преобразование множества G такое, что для любого y из G выполняется равенство $h_x(y) = x * y$. Преобразование h_x является внутренним левым сдвигом группоида G.

Ниже приведем определение 1 из [1].

Определение 1. Через $\mathrm{Bte}(G)$ обозначим множество всевозможных однозначных отображений множества G в множество $\{1, 2\}$. Отображения из данного множества будем называть *биполярными типами эндоморфизмов* группоида G (или просто *типами*). Если $\gamma \in \mathrm{Bte}(G)$ и для любого $g \in G$ выполняется равенство $\gamma(g) = 1$ (аналогично, $\gamma(g) = 2$), то отображение γ будем называть *первым типом* (аналогично, *вторым типом*). В данной работе первый тип будем обозначать через A, а второй тип через Ω. Если отображение $\gamma \in \mathrm{Bte}(G)$ не является постоянной на элементах из G, то γ будем называть *смешанным типом.*

Как обычно, централизатор преобразования α в симметрической полугруппе $I(G)$ будем обозначать символом

$$C(\alpha) := \{\beta \in I(X) \mid \alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha\}.$$

В определение 2 из [1] для каждого $g \in G$ вводятся множества $L^{(1)}(g)$ и $L^{(2)}(g)$ (далее, *типо-образующие множества*); в определение 3 из [1] для любого типа $\gamma \in \mathrm{Bte}(G)$ вводится множество $D(\gamma)$, которое называется *базовым множеством эндоморфизмов типа* γ группоида G. Приведем множества $L^{(1)}(g)$, $L^{(2)}(g)$ и $D(\gamma)$ ниже:

$$L^{(1)}(g) := \{\alpha \in C(h_g) \mid h_{\alpha(g)} = h_g\};$$

$$L^{(2)}(g) := \{\alpha \in I(G) \mid h_{\alpha(g)} \neq h_g, \quad \alpha \cdot h_g = h_{\alpha(g)} \cdot \alpha\};$$

$$D(\gamma) := \bigcap_{s \in G} L^{(\gamma(s))}(s);$$

$$D(A) := \bigcap_{s \in G} L^{(1)}(s), \qquad D(\Omega) := \bigcap_{s \in G} L^{(2)}(s).$$

Приведем теорему 1 из [1] (основная теорема о базовых множествах).

Теорема 1. *Для всякого группоида G справедливо равенство*

$$\mathrm{End}(G) = \bigcup_{\gamma \in \mathrm{Bte}(G)} D(\gamma). \tag{1}$$

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 1, С. 73-95
Mat. Trudy, 2024, vol. 27, no. 1, pp. 73-95

Кроме того, если τ и ω – два различных типа из $\mathrm{Bte}(G)$, *то пересечение множеств* $D(\tau)$ *и* $D(\omega)$ *пусто.*

Теорема 1 является основной теоремой о базовых множествах эндоморфизмов группоида.

Согласно определению 5 из [1] эндоморфизм α имеет биполярный тип γ из $\mathrm{Bte}(G)$, если $\alpha \in D(\gamma)$. В частности, имеет место следующая терминология:
1. эндоморфизм α имеет *первый тип*, если $\alpha \in D(A)$;
2. эндоморфизм α имеет *второй тип*, если $\alpha \in D(\Omega)$;
3. эндоморфизм α имеет *смешанный тип*, если γ – смешанный тип и множество $D(\gamma)$ содержит α.

Приведенное выше присвоение типов эндоморфизмам группоида приводит к биполярной классификации эндоморфизмов.

§ 3. Биполярный тип композиции

Данный раздел посвящен доказательству теоремы 2 о биполярном типе композиции некоторых пар эндоморфизмов. Группоид обозначается через G.

Биполярный тип эндоморфизма α будем обозначать через Γ_α. Имеет место эквиваленция

$$\Gamma_\alpha(g) = i \Leftrightarrow \alpha \in L^{(i)}(g) \quad (g \in G,\ \alpha \in \mathrm{End}(G),\ i \in \{1, 2\}), \tag{2}$$

которая устанавливает связь между $\Gamma_\alpha(g)$ и типо-образующими множествами $L^{(1)}(g)$, $L^{(2)}(g)$. Данная эквиваленция вытекает из определения биполярного типа эндоморфизма.

Как обычно, конъюнкцию будем обозначать через $(\wedge)$.

Лемма 1. *Пусть ϕ и ψ – эндоморфизмы группоида G и g – произвольный элемент группоида G. Тогда справедливы импликации:*

$$\Gamma_\phi(g) = 1 \wedge \Gamma_\psi(\phi(g)) = 1 \Rightarrow \Gamma_{\psi\cdot\phi}(g) = 1, \tag{3}$$

$$\Gamma_\phi(g) = 1 \wedge \Gamma_\psi(\phi(g)) = 2 \Rightarrow \Gamma_{\psi\cdot\phi}(g) = 2, \tag{4}$$

$$\Gamma_\phi(g) = 2 \wedge \Gamma_\psi(\phi(g)) = 1 \Rightarrow \Gamma_{\psi\cdot\phi}(g) = 2. \tag{5}$$

Доказательство. 1. Поскольку ϕ и ψ – эндоморфизмы группоида, то для каждого элемента $g \in G$ выполняются условия $\phi \in L^{(i)}(g)$, $\psi \in L^{(j)}(\phi(g))$ для подходящих i, j из $\{1, 2\}$. Поэтому выполняются равенства

$$\phi \cdot h_g = h_{\phi(g)} \cdot \phi, \quad \psi \cdot h_{\phi(g)} = h_{\psi(\phi(g))} \cdot \psi,$$

которые дают соотношения

$$(\psi\cdot\phi)\cdot h_g = \psi\cdot(\phi\cdot h_g) = \psi\cdot(h_{\phi(g)}\cdot\phi) = (\psi\cdot h_{\phi(g)})\cdot\phi = (h_{\psi(\phi(g))}\cdot\psi)\cdot\phi = h_{\psi(\phi(g))}\cdot(\psi\cdot\phi).$$

Следовательно, выполняется тождество

$$(\psi \cdot \phi) \cdot h_g = h_{\psi(\phi(g))} \cdot (\psi \cdot \phi). \tag{6}$$

2. Пусть выполняются посылки импликации (3). Тогда выполняются соотношения

$$h_{(\psi\cdot\phi)(g)} = h_{\psi(\phi(g))} = h_{\phi(g)} = h_g,$$

которые вместе с тождеством (6) показывают, что множество $L^{(1)}(g)$ содержит композицию $\psi \cdot \phi$. Импликация (3) доказана.

3. Пусть выполняются посылки импликации (4). Тогда выполняются соотношения

$$h_{(\psi\cdot\phi)(g)} = h_{\psi(\phi(g))} \neq h_{\phi(g)} = h_g,$$

которые вместе с тождеством (6) показывают, что множество $L^{(2)}(g)$ содержит композицию $\psi \cdot \phi$. Импликация (4) доказана.

4. Пусть выполняются посылки импликации (5). Тогда выполняются соотношения

$$h_{(\psi\cdot\phi)(g)} = h_{\psi(\phi(g))} = h_{\phi(g)} \neq h_g,$$

которые вместе с тождеством (6) показывают, что множество $L^{(2)}(g)$ содержит композицию $\psi \cdot \phi$. Импликация (5) доказана.

Лемма доказана.

Импликации

$$\Gamma_\phi(g) = 2 \wedge \Gamma_\psi(\phi(g)) = 2 \Rightarrow \Gamma_{\psi\cdot\phi}(g) = 1, \tag{7}$$

$$\Gamma_\phi(g) = 2 \wedge \Gamma_\psi(\phi(g)) = 2 \Rightarrow \Gamma_{\psi\cdot\phi}(g) = 2 \tag{8}$$

в общем случае (т.е. для всякого группоида G и любого $g \in G$) не выполняется. Ниже будет приведен пример 1, в котором строится группоид такой, что для различных пар эндоморфизмов и различных элементов g из G могут выполнятся как импликация (7) так и импликация (8).

Определение 2. Для каждого группоида G пару (ψ, ϕ) эндоморфизмов будем называть 2-*альтернирующей* (или просто *альтернирующей*), если в группоиде G не существует элемента g такого, что одновременно выполняются следующие условия:

$$\Gamma_\phi(g) = 2, \quad \Gamma_\psi(\phi(g)) = 2. \tag{9}$$

Замечание 1. В контексте теоремы 2 становится ясно, что интерес представляет исключительно альтернация (чередование) для двойки в кортеже $(\Gamma_\phi(g), \Gamma_\psi(\phi(g)))$. Поэтому 2-альтернирующую пару всюду далее будем называть просто *альтернирующей.*

Для альтернирующей пары (ψ, ϕ) биполярный тип композиции $\psi \cdot \phi$ однозначно определяется (с помощью теоремы 2) биполярными типами эндоморфизмов ϕ и ψ.

Существование неальтернирующих пар эндоморфизмов показано в примере 1.

Обычное произведение двух натуральных чисел обозначим через $(*)$.

Теорема 2. *Если (ψ, ϕ) – альтернирующая пара эндоморфизмов группоида G, то для любого $g \in G$ выполняется равенство:*

$$\Gamma_{\psi\cdot\phi}(g) = \Gamma_\phi(g) * \Gamma_\psi(\phi(g)). \tag{10}$$

Доказательство. В силу основной теоремы о базовых множествах для любого $g \in G$ всякий эндоморфизм τ либо лежит в множестве $L^{(1)}(g)$ либо в множестве $L^{(2)}(g)$. Действительно, для любого фиксированного $g \in G$ и всякого биполярного типа γ выполняется альтернатива: либо $D(\gamma) \subseteq L^{(1)}(g)$ либо $D(\gamma) \subseteq L^{(2)}(g)$. Поэтому, если эндоморфизм τ не лежит в $L^{(1)}(g)$ и $L^{(2)}(g)$ одновременно, то он не лежит ни в одном базовом множестве эндоморфизмов, что не возможно.

Следовательно, для всякого фиксированного $g \in G$ и пары эндоморфизмов (ψ, ϕ) выполняется ровно один из приведенных случаев:

$$\phi \in L^{(1)}(g) \wedge \psi \in L^{(1)}(\phi(g)); \quad \phi \in L^{(1)}(g) \wedge \psi \in L^{(2)}(\phi(g));$$

$$\phi \in L^{(2)}(g) \wedge \psi \in L^{(1)}(\phi(g)); \quad \phi \in L^{(2)}(g) \wedge \psi \in L^{(2)}(\phi(g)).$$

Поскольку пара (ψ, ϕ) является альтернирующей, то последний случай невозможен. В силу эквиваленции (2) и леммы 1 получаем, что для всякого $g \in G$ выполняется равенство (10). Теорема доказана.

Если $\tau \in D(A)$, то для любого эндоморфизма ω пары (τ, ω) и (ω, τ) будут альтернирующими. В самом деле, если $\tau \in D(A)$, то для любого $g \in G$ верно равенство $\Gamma_\tau(g) = 1$. Поэтому из теоремы 2 вытекают

Следствие 1. *Если $\phi \in D(A)$, то для любого эндоморфизма $\psi \in \mathrm{End}(G)$ и любого $g \in G$ выполняется равенство $\Gamma_{\psi\cdot\phi}(g) = \Gamma_\psi(\phi(g))$.*

Следствие 2. *Если $\psi \in D(A)$, то для любого эндоморфизма $\phi \in \mathrm{End}(G)$ и любого $g \in G$ выполняется равенство $\Gamma_{\psi\cdot\phi}(g) = \Gamma_\phi(g)$.*

Таким образом, если один из эндоморфизмов композиции имеет первый тип, то тип композиции определяется типом другого эндоморфизма данной композиции.

Пусть $G = \{1, 2, ..., n\}$ – некоторое конечное множество. Тогда для преобразований из симметрической полугруппы $I(G)$ будем использовать обозначения

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ a_1 & a_2 & ... & a_n \end{pmatrix} = (a_1, a_2, ..., a_n) = (\alpha(1), \alpha(2), ..., \alpha(n)).$$

Если G – конечный группоид и $G = \{1, 2, ..., n\}$, то для обозначения его биполярных типов γ из множества $\mathrm{Bte}(G)$ будем использовать кортежи $\gamma = (\gamma(1), \gamma(2), ..., \gamma(n))$.

Приведем пример группоида, в котором существуют неальтернирующие пары эндоморфизмов.

Пример 1. Рассмотрим группоид G, определенный своими левыми сдвигами:

$$h_1 = (1, 1, 1, 1),\ h_2 = (1, 1, 1, 2),\ h_3 = (1, 1, 1, 1),\ h_4 = (1, 2, 1, 1).$$

Компьютерные вычисления показывают, что для базовых множеств эндоморфизмов группоида G справедливы равенства:

$$D(1, 1, 1, 1) = \{(1, 2, 1, 4), (1, 2, 3, 4)\};\ D(1, 2, 1, 1) = \{(1, 1, 1, 4), (1, 1, 3, 4)\};$$

$$D(1, 2, 1, 2) = \{(1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 2), (1, 1, 1, 3), (1, 1, 3, 1), (1, 1, 3, 2), (1, 1, 3, 3)\};$$

$$D(1, 2, 2, 1) = \{(1, 1, 4, 4)\};$$

$$D(1, 2, 2, 2) = \{(1, 1, 2, 1), (1, 1, 4, 1), (1, 1, 2, 2), (1, 1, 2, 3), (1, 1, 4, 3)\}.$$

Остальные базовые множества пусты. Рассмотрим две пары эндоморфизмов (ψ_1, ϕ_1) и (ψ_2, ϕ_2), где

$$\phi_1 = (1, 1, 1, 2),\ \psi_1 = (1, 1, 4, 4),\ \phi_2 = (1, 1, 2, 1),\ \psi_2 = (1, 1, 1, 1).$$

Данные эндоморфизмы имеют типы

$$\Gamma_{\phi_1} = (1, 2, 1, 2),\ \Gamma_{\psi_1} = (1, 2, 2, 1),\ \Gamma_{\phi_2} = (1, 2, 2, 2),\ \Gamma_{\psi_2} = (1, 2, 1, 2).$$

Кроме того, справедливы равенства

$$\psi_1 \cdot \phi_1 = (1, 1, 1, 1),\ \psi_2 \cdot \phi_2 = (1, 1, 1, 1),\ \Gamma_{\psi_1 \cdot \phi_1} = \Gamma_{\psi_2 \cdot \phi_2} = (1, 2, 1, 2).$$

Из приведенных равенств следуют соотношения:

$$\Gamma_{\phi_1}(4) = 2,\ \Gamma_{\psi_1}(\phi_1(4)) = \Gamma_{\psi_1}(2) = 2;$$

$$\Gamma_{\phi_2}(3) = 2,\ \Gamma_{\psi_2}(\phi_2(3)) = \Gamma_{\psi_2}(2) = 2.$$

Таким образом, мы видим, что пары (ψ_1, ϕ_1) и (ψ_2, ϕ_2) не альтернирующие. При этом $\Gamma_{\psi_1 \cdot \phi_1}(4) = 2$ и $\Gamma_{\psi_2 \cdot \phi_2}(3) = 1$. Следовательно, даже в контексте одного группоида для неальтернирующей пары в общем случае (т.е. при любом $y \in G$) не выполняются импликации (7) и (8).

§ 4. Альтернирующие полугруппы

Для всякого множества X через $X \times X$, как обычно, обозначаем декартов квадрат множества X. Пусть G – некоторый группоид, H – подмножество группоида G и α – некоторый эндоморфизм G. Тогда, как обычно, будем пользоваться обозначением $\alpha(H) := \{\alpha(h) \mid h \in H\}$.

Определение 3. Полугруппу эндоморфизмов H группоида G назовем *альтернирующей*, если любая пара (α, β) эндоморфизмов из $H \times H$ является альтернирующей.

Свойство 1. Всякая подполугруппа альтернирующей полугруппы эндоморфизмов будет альтернирующей полугруппой эндоморфизмов.

Свойство 2. Для всякой пары (ψ, ϕ) эндоморфизмов альтернирующей полугруппы выполняется равенство 10 .

Данные свойства легко выводятся из определения альтернирующей полугруппы.

Пусть $\mathcal{F}$ – некоторая совокупность (система) базовых множеств эндоморфизмов группоида G и $\mathcal{F}_c$ – объединение всех множеств из $\mathcal{F}$, если $|\mathcal{F}| > 1$; и $\mathcal{F}_c = D(\gamma)$, когда $\mathcal{F} = \{D(\gamma)\}$.

Каждое базовое множество эндоморфизмов имеет свой единственный биполярный тип γ из $\mathrm{Bte}(G)$. Поэтому можно ввести множество

$$B(\mathcal{F}) := \{\gamma \in \mathrm{Bte}(G) \mid D(\gamma) \in \mathcal{F}\}.$$

Множества $B(\mathcal{F})$ и $\mathcal{F}$ равномощны.

Для каждой системы базовых множеств $\mathcal{F}$ введем множество $Y(\mathcal{F})$, которое состоит элементов $x \in G$ таких, что для любого биполярного типа γ из $B(\mathcal{F})$ выполняется равенство $\gamma(x) = 1$. То есть

$$Y(\mathcal{F}) := \{x \in G \mid \forall \gamma \in B(\mathcal{F}) :\ \gamma(x) = 1\}.$$

Пусть $\mathcal{F}$ – система базовых множеств. Тогда через $\mathrm{Altend}(\mathcal{F}, G)$ обозначим множество всевозможных эндоморфизмов α из $\mathcal{F}_c$, для которых выполняются включение $\alpha(G) \subseteq Y(\mathcal{F})$.

Теорема 3. *Если множество* $\mathrm{Altend}(\mathcal{F}, G)$ *не пусто для* $\mathcal{F}$ *и* G, *то оно является полугруппой эндоморфизмов относительно композиции. Полугруппа* $\mathrm{Altend}(\mathcal{F}, G)$ *является альтернирующей полугруппой эндоморфизмов.*

Доказательство. Полагаем, что множество $\mathrm{Altend}(\mathcal{F}, G)$ не пусто. Покажем замкнутость. Пусть ϕ и ψ – два произвольных эндоморфизма из множества $\mathrm{Altend}(\mathcal{F}, G)$. Значит, выполняются условия

$$\phi(G) \subseteq Y(\mathcal{F}), \quad \psi(G) \subseteq Y(\mathcal{F}). \tag{11}$$

Поскольку ϕ и ψ принадлежат $\mathrm{Altend}(\mathcal{F}, G)$, то справедливы условия

$$D(\Gamma_\phi) \in \mathcal{F},\ D(\Gamma_\psi) \in \mathcal{F},$$

которые вместе с соотношениями (11) показывают, что для любого g из G выполняются равенства $\Gamma_\phi(\psi(g)) = \Gamma_\psi(\phi(g)) = 1$. Следовательно, пара (ψ, ϕ) эндоморфизмов является альтернирующей. Действительно, в данном случае кортежи $(\Gamma_\psi(g), \Gamma_\phi(\psi(g)))$ и $(\Gamma_\phi(g), \Gamma_\psi(\phi(g)))$ отличны от кортежа $(2, 2)$.

Для пары (ψ, ϕ) выполняется теорема 2 и биполярный тип композиции $\psi \cdot \phi$ будет задаваться равенством

$$\Gamma_{\psi\cdot\phi}(g) = \Gamma_\phi(g) * \Gamma_\psi(\phi(g)) = \Gamma_\phi(g) * 1 = \Gamma_\phi(g), \tag{12}$$

которое выполняется для любого $g \in G$. Значит, выполняется равенство $\Gamma_{\psi\cdot\phi} = \Gamma_\phi$, следовательно, имеем равенство базовых множеств $D(\Gamma_{\psi\cdot\phi})$ и $D(\Gamma_\phi)$. Поскольку $D(\Gamma_\phi) \in \mathcal{F}$, то и $D(\Gamma_{\psi\cdot\phi}) \in \mathcal{F}$. Поэтому множество $\mathcal{F}_c$ содержит эндоморфизм $\psi \cdot \phi$.

Покажем, что выполняется включение $(\psi \cdot \phi)(G) \subseteq Y(\mathcal{F})$. В самом деле, поскольку выполняются условия (11) и $Y(\mathcal{F}) \subseteq G$, то имеют место соотношения

$$(\psi \cdot \phi)(G) = \psi(\phi(G)) \subseteq \psi(Y(\mathcal{F})) \subseteq Y(\mathcal{F}).$$

Таким образом, мы показали, что множество $\mathrm{Altend}(\mathcal{F}, G)$ замкнуто относительно композиции, следовательно, оно является полугруппой эндоморфизмов. Как отмечалось выше, из условий (11) следует, что всякая пара (ψ, ϕ) из $\mathrm{Altend}(\mathcal{F}, G) \times \mathrm{Altend}(\mathcal{F}, G)$ является альтернирующей. Значит, полугруппа $\mathrm{Altend}(\mathcal{F}, G)$ будет альтернирующей полугруппой. Теорема доказана.

Определение 4. Полугруппу эндоморфизмов $\mathrm{Altend}(\mathcal{F}, G)$ будем называть *специальной альтернирующей полугруппой эндоморфизмов* группоида G по полной системе базовых множеств $\mathcal{F}$.

Специальные альтернирующие полугруппы эндоморфизмов обладают важным свойством

Свойство 3. *Если множество* $\mathrm{Altend}(\mathcal{F}, G)$ *не пусто, то для любых* ϕ *и* ψ *из полугруппы* $\mathrm{Altend}(\mathcal{F}, G)$ *и всякого* $g \in G$ *выполняется равенство*

$$\Gamma_{\psi \cdot \phi}(g) = \Gamma_{\phi}(g).$$

Данное свойство вытекает из соотношения (12), которое использовалось для доказательства теоремы 3.

Таким образом, в силу свойства 2 биполярный тип композиции эндоморфизмов из альтернирующей полугруппы вычисляется с помощью равенства (10). При этом биполярный тип композиции эндоморфизмов из специальной альтернирующей полугруппы вычисляется по более простой формуле из свойства 3.

Замечание 2. Специальная альтернирующая полугруппа $\mathrm{Altend}(\mathcal{F}, G)$ может являться монотипной, если $|\mathcal{F}| = 1$; и мультитипной, когда система $\mathcal{F}$ содержит более одного не пустого базового множества эндоморфизмов.

Лемма 2. *Для любого группоида* G *базовое множество* $D(A)$ *эндоморфизмов первого типа совпадает с множеством* $\mathrm{Altend}(\mathcal{F}, G)$*, когда выполняется равенство* $\mathcal{F} = \{D(A)\}$.

Доказательство. Для $\mathcal{F} = \{D(A)\}$ множество $\mathrm{Altend}(\mathcal{F}, G)$ не пусто и по теореме 3 является полугруппой. При этом $Y(\mathcal{F}) = G$, следовательно, все эндоморфизмы из $D(A)$ попадают в полугруппу $\mathrm{Altend}(\mathcal{F}, G)$. Лемма доказана.

Рассмотрим моноид $\mathrm{Motend}(A, G)$, который вводится в работе [1] (см. теорема 3 из [1]). Имеем

$$\mathrm{Motend}(A, G) := \bigcap_{g \in G} (O_g \cap C(h_g)),$$

где множества M_g и O_g определены равенствами

$$M_g := \{m \in G \mid h_g = h_m\}, \quad O_g := \{\alpha \in I(G) \mid \alpha(M_g) \subseteq M_g\}$$

для любого элемента $g \in G$. Отметим, что множество M_g всегда не пустое (там всегда содержится элемент g).

Теорема 4. *Для любого группоида* G *выполняются равенства множеств*

$$D(A) = \mathrm{Altend}(\{D(A)\}, G) = \mathrm{Motend}(A, G).$$

Доказательство. Равенство $D(A) = \mathrm{Altend}(\{D(A)\}, G)$ вытекает из леммы 2. Теорема 3 из [1] дает включение $\mathrm{Motend}(A, G) \subseteq D(A)$. Полагаем, что α – произвольный эндоморфизм из $D(A)$, следовательно для любого $g \in G$ выполняются условия $h_{\alpha(g)} = h_g$, $\alpha \in C(h_g)$, которые вытекают из определений множества $D(A)$ и $L^{(1)}(g)$. Поэтому эндоморфизм α принадлежит множеству O_g при любом $g \in G$. Действительно, пусть m – произвольный элемент из M_g. Тогда $h_{\alpha(m)} = h_m = h_g$ (в силу сказанного выше). Значит, элемент $\alpha(m)$ принадлежит множеству M_g, следовательно, выполняется условие $\alpha(M_g) \subseteq M_g$, которое показывает, что O_g содержит эндоморфизм α.

Таким образом, α принадлежит множеству $\mathrm{Motend}(A, G)$. Показано включение $D(A) \subseteq \mathrm{Motend}(A, G)$, следовательно, доказано равенство множеств $D(A) = \mathrm{Motend}(A, G)$.

Теорема доказана.

Поскольку каждый автоморфизм группоида G является биекцией, то очевидно следующее

Свойство 4. *Специальная альтернирующая полугруппа* $\mathrm{Altend}(\mathcal{F}, G)$ *содержит автоморфизм тогда и только тогда, когда* $\mathcal{F} = \{D(A)\}$.

Из теоремы 4 вытекает, что для любого группоида существует монотипная специальная альтернирующая полугруппа. Действительно, $D(A)$ не пусто для любого группоида G (там всегда содержится тождественное преобразование).

Следующий простой пример показывает, что существует группоид у которого есть мультитипная специальная альтернирующая полугруппа.

Пример 2. Рассмотрим группоид G из примера 1, для которого известно

$$D(1, 2, 1, 1) = \{(1, 1, 1, 4), (1, 1, 3, 4)\},\ D(1, 2, 2, 1) = \{(1, 1, 4, 4)\}.$$

Полагаем, что $\mathcal{F} = \{D(1, 2, 1, 1), D(1, 2, 2, 1)\}$, следовательно, $Y(\mathcal{F}) = \{1, 4\}$. Действительно, на элементах $\{1,4\}$ группоида G биполярные типы $(1, 2, 1, 1)$ и $(1, 2, 2, 1)$ принимают значение 1.

Поскольку только эндоморфизмы $(1, 1, 1, 4)$ и $(1, 1, 4, 4)$ переводят множество $Y(\mathcal{F}) = \{1, 4\}$ в себя, то имеем

$$\mathrm{Altend}(\mathcal{F}, G) = \{(1, 1, 1, 4), (1, 1, 4, 4)\}.$$

Существование специальной альтернирующей полугруппы показано.

§ 5. Доказательство теоремы 5

Пусть $G = (G, *)$, $G' = (G', *')$ – пара изоморфных группоидов и отображение $\zeta : G \to G'$ – изоморфизм данных группоидов. Не сложно показать, что отображение $\zeta_e : \mathrm{End}(G) \to \mathrm{End}(G')$, определенное правилом

$$\zeta_e(\alpha) = \zeta \cdot \alpha \cdot \zeta^{-1} \quad (\alpha \in \mathrm{End}(G)),$$

является изоморфизмом соответствующих моноидов эндоморфизмов. В данном разделе мы покажем, что специальная альтернирующая полугруппа эндоморфизмов группоида G изоморфна специальной альтернирующей полугруппе группоида G' (см. теорему 5 и следствие 3).

Нам потребуется теорема 2 из [1], которую мы сформулируем, адаптируя к обозначениям данной статьи, как

Лемма 3. *Пусть $\zeta : G \to G'$ – изоморфизм группоидов G и G'. Тогда для любого $g \in G$ и всякого $\alpha \in \mathrm{End}(G)$ справедливо равенство*

$$\Gamma_{\alpha'}(\zeta(g)) = \Gamma_\alpha(g), \tag{13}$$

где $\alpha' = \zeta_e(\alpha)$.

Если $H \subseteq \mathrm{End}(G)$, то, как обычно, будем использовать обозначение: $\zeta_e(H) := \{\zeta_e(h) \mid h \in H\}$.

Лемма 4. *Пусть $D(\gamma)$ – не пустое базовое множество эндоморфизмов типа γ в группоиде G. Тогда существует базовое множество эндоморфизмов $D(\tau)$ типа τ в группоиде G' такое, что выполняется равенство множеств*

$$\zeta_e(D(\gamma)) = D(\tau).$$

Доказательство. Покажем, что эндоморфизмы из $\zeta_e(D(\gamma))$ имеют один биполярный тип. Пусть α_1, α_2 – два произвольных эндоморфизма из $D(\gamma)$. Тогда справедливы равенства отображений $\Gamma_{\alpha_1} = \Gamma_{\alpha_2} = \gamma$. Предположим, что $\Gamma_{\alpha'_1} \neq \Gamma_{\alpha'_2}$, где $\alpha'_1 = \zeta_e(\alpha_1)$ и $\alpha'_2 = \zeta_e(\alpha_2)$. Следовательно, существует $g \in G$ такой, что $\Gamma_{\alpha'_1}(\zeta(g)) \neq \Gamma_{\alpha'_2}(\zeta(g))$. В силу равенства (13) имеют место соотношения

$$\Gamma_{\alpha'_1}(\zeta(g)) = \Gamma_{\alpha_1}(g), \quad \Gamma_{\alpha'_2}(\zeta(g)) = \Gamma_{\alpha_2}(g). \tag{14}$$

При этом имеют место равенства $\Gamma_{\alpha_1} = \Gamma_{\alpha_2} = \gamma$. Таким образом, мы пришли к противоречию, которое показывает, что все эндоморфизмы из $\zeta_e(D(\gamma))$ имеют один биполярный тип. Следовательно, выполняется включение $\zeta_e(D(\gamma)) \subseteq D(\tau)$ для некоторого $\tau \in \mathrm{Bte}(G')$.

Покажем, что последнее включение выполняется в обратную сторону. Предположим, что базовое множество $D(\tau)$ содержит эндоморфизм α' такой, что $\zeta_e^{-1}(\alpha) \notin D(\gamma)$ (как отмечалось выше, ζ_e – изоморфизм, поэтому ζ_e^{-1} существует). Значит, выполняется условие $\zeta_e^{-1}(\alpha) \in D(\omega)$, где $\omega \neq \gamma$. Поэтому существует эндоморфизм $\beta \in D(\omega)$ такой, что $\alpha = \zeta_e(\beta)$ и с учетом равенства (13) для всякого $g \in G$ выполняются соотношения

$$\Gamma_\alpha(\zeta(g)) = \Gamma_\beta(g) = \omega(g). \tag{15}$$

При этом $\Gamma_\alpha = \Gamma_{\alpha_1'}$, где α_1' – эндоморфизм из равенства (14). Действительно, α_1' лежит в $D(\tau)$ (по доказанному). Кроме того, в силу (14) для любого $g \in G$ имеем равенство $\Gamma_{\alpha_1'}(\zeta(g)) = \Gamma_{\alpha_1}(g)$. С учетом соотношений (15) получаем, что для любого $g \in G$ выполняется цепочка равенств

$$\omega(g) = \Gamma_\alpha(\zeta(g)) = \Gamma_{\alpha_1'}(\zeta(g)) = \Gamma_{\alpha_1}(g) = \gamma(g).$$

Отсюда получаем равенство $\omega = \gamma$. Имеем противоречие. Следовательно, выполняется включение $D(\tau) \subseteq \zeta_e(D(\gamma))$. Значит, выполняется равенство $\zeta_e(D(\gamma)) = D(\tau)$. Лемма доказана.

Пусть $\mathcal{F}$ – система базовых множеств группоида G. Тогда будем использовать обозначение $\zeta_e(\mathcal{F}) := \{\zeta_e(D(\gamma)) \mid D(\gamma) \in \mathcal{F}\}$.

С учетом леммы 4 точно известно, что $\zeta_e(\mathcal{F})$ – система базовых множеств группоида G'.

Введем обозначение

$$U(G) := \{\gamma \in \mathrm{Bte}(G) \mid D(\gamma) \neq \emptyset\} \subseteq \mathrm{Bte}(G).$$

То есть $U(G)$ – множество всевозможных биполярных типов для группоида G, для которых базовые множества эндоморфизмов не пусты. Всякий изоморфизм $\zeta : G \to G'$ индуцирует отображение $\Upsilon_\zeta : U(G) \to \mathrm{Bte}(G')$, которое для каждого $\gamma \in U(G)$ определяется эквиваленцией:

$$\Upsilon_\zeta(\gamma) = \gamma' \iff \zeta_e(D(\gamma)) = D(\gamma'),$$

где $D(\gamma')$ – базовое множество эндоморфизмов группоида G'. Корректность определения отображения Υ_ζ следует из леммы 4 (базовое множество группоида G под действием ζ_e переходит в базовое множество группоида G').

Лемма 5. *Для любых $\gamma \in U(G)$ и $\gamma' \in \mathrm{Bte}(G')$ справедлива эквиваленция*

$$\Upsilon_\zeta(\gamma) = \gamma' \iff \forall g \in G: \ \gamma'(\zeta(g)) = \gamma(g). \tag{16}$$

Доказательство. Покажем, что выполняется импликация

$$\Upsilon_\zeta(\gamma) = \gamma' \Rightarrow \forall g \in G: \ \gamma'(\zeta(g)) = \gamma(g).$$

Действительно, поскольку $\Upsilon_\zeta(\gamma) = \gamma'$, то $\zeta_e(D(\gamma)) = D(\gamma')$ (по определению отображения Υ_ζ). Следовательно, существуют эндоморфизмы α' из $\zeta_e(D(\gamma)) = D(\gamma')$ и $\alpha \in D(\gamma)$ такие, что $\alpha' = \zeta_e(\alpha)$ и $\Gamma_{\alpha'} = \gamma'$, $\Gamma_\alpha = \gamma$. В силу (13) это означает, что для любого $g \in G$ выполняется цепочка равенств

$$\gamma'(\zeta(g)) = \Gamma_{\alpha'}(\zeta(g)) = \Gamma_\alpha(g) = \gamma(g).$$

Поэтому для любого $g \in G$ выполняется равенство $\gamma'(\zeta(g)) = \gamma(g)$. Рассмотренная импликация (от левого к правому) доказана.

Предположим теперь, что для любого $g \in G$ выполняются равенства $\gamma'(\zeta(g)) = \gamma(g)$. Поскольку $\gamma \in U(G)$, то базовое множество эндоморфизмов $D(\gamma)$ не пусто. Значит не пусто множество $\zeta_e(D(\gamma))$. В силу (13) каждый эндоморфизм $\alpha' \in \zeta_e(D(\gamma))$ имеет тип $\Gamma_{\alpha'}$ такой, что

$$\Gamma_{\alpha'}(\zeta(g)) = \Gamma_\alpha(g) = \gamma(g) = \gamma'(\zeta(g))$$

для $\alpha = \zeta^{-1}(\alpha')$. Следовательно, для любого $g \in G$ имеем равенство $\Gamma_{\alpha'}(\zeta(g)) = \gamma'(\zeta(g))$. Поскольку ζ – изоморфизм, то $\zeta(G) = G'$. Следовательно, $\Gamma_{\alpha'} = \gamma'$. Значит, $\alpha' \in D(\gamma')$. Поскольку α' – произвольный эндоморфизм из $\zeta_e(D(\gamma))$, то с учетом леммы 4 (о том, что образ базового множества есть базовое множество) мы имеем равенство $\zeta_e(D(\gamma)) = D(\gamma')$. Из последнего равенства множеств следует соотношение $\Upsilon_\zeta(\gamma) = \gamma'$ (по определению отображения Υ_ζ). Таким образом, мы показали, что выполняется импликация от правого утверждения к левому утверждению в эквиваленции (16). Теорема доказана.

Из данной леммы следует, что для любых $\gamma \in U(G)$ и $\gamma' \in \mathrm{Bte}(G')$ справедлива эквиваленция

$$\zeta_e(D(\gamma)) = D(\gamma') \iff \forall g \in G: \ \gamma'(\zeta(g)) = \gamma(g). \tag{17}$$

Лемма 6. *Пусть $\mathcal{F}$ – система базовых множеств группоида G. Тогда выполняется равенство*

$$Y(\zeta_e(\mathcal{F})) = \{g' \in G' \mid \exists g \in G \ \forall \gamma \in B(\mathcal{F}): \ (g' = \zeta(g)) \wedge (\gamma(g) = 1)\}. \tag{18}$$

Доказательство. По определению множества Y имеем

$$Y(\zeta_e(\mathcal{F})) = \{g' \in G' \mid \forall \gamma' \in B(\zeta_e(\mathcal{F})): \ \gamma'(g') = 1\}. \tag{19}$$

Далее, множество из правой части равенства (18) будем обозначать через T.

Покажем, что выполняется включение $Y(\zeta_e(\mathcal{F})) \subseteq T$. Пусть g' принадлежит множеству $Y(\zeta_e(\mathcal{F}))$. Поскольку ζ – изоморфизм группоидов G и G', то существует элемент g из G такой, что справедливо соотношение $g' = \zeta(g)$. В силу эквиваленции (17) получаем, что для любого $g \in G$ выполняется равенство $\gamma'(\zeta(g)) = \gamma(g)$, когда $\zeta_e(D(\gamma)) = D(\gamma')$. Поскольку g' принадлежит $Y(\zeta_e(\mathcal{F}))$, то ля любого $\gamma \in B(\mathcal{F})$ выполняются соотношения

$$1 = \gamma'(g') = \gamma'(\zeta(g)) = \gamma(g),$$

которые показывают, что $\gamma(g) = 1$. Следовательно, множество $Y(\zeta_e(\mathcal{F}))$ является подмножеством в множестве из правой части равенства (18).

Покажем теперь включение $T \subseteq Y(\zeta_e(\mathcal{F}))$. Пусть $g' \in T$. Поскольку $g' \in T$, то существует $g \in G$ такой, что $g' = \zeta(g)$ и $\gamma(g) = 1$ для любого $\gamma \in B(\mathcal{F})$. В данном контексте эквиваленция (17) показывает, что для любого $\gamma' \in B(\zeta_e(\mathcal{F})$ выполняются соотношения

$$1 = \gamma(g) = \gamma'(\zeta(g)) = \gamma'(g'),$$

которые показывают, что $\gamma'(g') = 1$. Таким образом, мы показали, что $g' \in Y(\zeta_e(\mathcal{F}))$, следовательно, $T \subseteq Y(\zeta_e(\mathcal{F}))$ и равенство (18) выполняется. Лемма доказана.

Теперь можно сформулировать

Теорема 5. *Если множество* $\mathrm{Altend}(\mathcal{F}, G)$ *не пусто для* $\mathcal{F}$ *и* G, *то выполняется равенство множеств*

$$\zeta_e(\mathrm{Altend}(\mathcal{F}, G)) = \mathrm{Altend}(\zeta_e(\mathcal{F}), G'). \tag{20}$$

Доказательство. В силу леммы 4 множество $\zeta_e(\mathcal{F})$ – система базовых множеств группоида G'. Поэтому $\mathrm{Altend}(\zeta_e(\mathcal{F}), G')$ – альтернирующая полугруппа эндоморфизмов группоида G'. Покажем, что выполняется включение

$$\zeta_e(\mathrm{Altend}(\mathcal{F}, G)) \subseteq \mathrm{Altend}(\zeta_e(\mathcal{F}), G'). \tag{21}$$

1. Из построения системы базовых множеств $\zeta_e(\mathcal{F})$ сразу вытекает, что всякий эндоморфизм из $\zeta_e(\mathrm{Altend}(\mathcal{F}, G))$ принадлежит множеству $\zeta_e(\mathcal{F})_c$, где $\zeta_e(\mathcal{F})_c$ – объединение всех базовых множеств системы $\zeta_e(\mathcal{F})$.

2. Покажем, что всякий эндоморфизм α' из $\zeta_e(\mathrm{Altend}(\mathcal{F}, G))$ удовлетворяет условию $\alpha'(G') \subseteq Y(\zeta_e(\mathcal{F}))$.

В самом деле, существует эндоморфизм α из $\mathrm{Altend}(\mathcal{F}, G)$ такой, что $\alpha' = \zeta_e(\alpha)$. Из определения множества $\mathrm{Altend}(\mathcal{F}, G)$ следуют соотношения

$$\alpha \in \mathcal{F}_c, \quad \alpha(G) \subseteq Y(\mathcal{F}). \tag{22}$$

Произвольный элемент $g' \in G'$ можно представить в виде $g' = \zeta(g)$, для подходящего g из G. В силу определения отображения $\zeta_e(\alpha)$ получаем

$$\alpha'(\zeta(g)) = (\zeta_e(\alpha))(\zeta(g)) = \zeta(\alpha(\zeta^{-1}(\zeta(g)))) = \zeta(\alpha(g)).$$

В силу соотношения (22) получаем, что $\alpha(g)$ принадлежит $Y(\mathcal{F})$. Значит, для любого типа γ из $B(\mathcal{F})$ выполняется условие $\gamma(\alpha(g)) = 1$. Поэтому элемент $\alpha'(\zeta(g)) = \zeta(\alpha(g))$ принадлежит множеству $Y(\zeta_e(\mathcal{F}))$. Действительно, достаточно рассмотреть $\alpha(g)$ как некоторый элемент s из G и воспользоваться равенством (18). Мы показали включение $\alpha'(G') \subseteq Y(\zeta_e(\mathcal{F}))$.

Таким образом, мы показали, что выполняются соотношения

$$\alpha'(G') \subseteq Y(\zeta_e(\mathcal{F})), \quad \zeta_e(\mathrm{Altend}(\mathcal{F}, G)) \subseteq \zeta_e(\mathcal{F})_c,$$

следовательно, выполняется включение (21).

3. Покажем, что включение (21) выполняется в обратную сторону. Пусть β' – произвольный элемент из $\mathrm{Altend}(\zeta_e(\mathcal{F}), G')$. Тогда β' принадлежит $\zeta_e(\mathcal{F})_c$, следовательно, существует β из $\mathcal{F}_c$ такой, что $\beta' = \zeta_e(\beta)$. Поскольку $\beta' \in \mathrm{Altend}(\zeta_e(\mathcal{F}), G')$, то выполняется условие

$$\beta'(G') \subseteq Y(\zeta_e(\mathcal{F})). \tag{23}$$

С другой стороны, имеем соотношения

$$\beta'(G') = (\zeta_e(\beta))(G') = (\zeta_e(\beta))(\zeta(G)) = \zeta(\beta(\zeta^{-1}(\zeta(G)))) = \zeta(\beta(G)),$$

которые вместе с условием (23) показывают, что $\zeta(\beta(G)) \subseteq Y(\zeta_e(\mathcal{F}))$. В месте с (18) последнее включение показывает, что для любого $\gamma \in B(\mathcal{F})$ и всякого $g \in G$ выполняется равенство $\gamma(\beta(g)) = 1$. Следовательно, выполняется условие $\beta(G) \subseteq Y(\mathcal{F})$. Поэтому β принадлежит $\mathrm{Altend}(\mathcal{F}, G)$.

Таким образом, мы показали, что каждый эндоморфизм из полугруппы $\mathrm{Altend}(\zeta_e(\mathcal{F}), G')$ является образом под действием ζ_e некоторого подходящего эндоморфизма из $\mathrm{Altend}(\mathcal{F}, G)$. Поэтому включение (21) выполняется в обратную сторону, следовательно, равенство (20) доказано. Теорема доказана.

Поскольку $\zeta_e : \mathrm{End}(G) \to \mathrm{End}(G')$ – изоморфизм соответствующих полугрупп, то из равенства (20) сразу вытекает

Следствие 3. *Полугруппы* $\mathrm{Altend}(\mathcal{F}, G)$ *и* $\mathrm{Altend}(\zeta_e(\mathcal{F}), G')$ *изоморфны.*

Список литературы

1. *Литаврин А. В.* О поэлементном описании моноида всех эндоморфизмов произвольного группоида и одной классификации эндоморфизмов группоида // *Труды Института математики и механики УрО.* 2023. Т. 29, № 1. С. 143–159.

2. *Левчук В. М.* Автоморфизмы унипотентных подгрупп групп Шевалле // *Алгебра и логика.* 1990. Т. 29, № 3. С. 315–338.

3. *Левчук В. М.* Автоморфизмы унипотентных подгрупп групп лиева типа малых рангов // *Алгебра и логика.* 1990. Т. 29, № 2. С. 141–161.

4. *Бунина Е. И., Семенов П. П.* Автоморфизмы полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами над коммутативными частично упорядоченными кольцами // *Фундаментальная и прикладная математика.* 2008. Т. 14, № 2. С. 69–100.

5. *Бунина Е. И., Сосов К.* Эндоморфизмы полугрупп неотрицательных обратимых матриц порядка два над коммутативными упорядоченными кольцами // *Фундаментальная и прикладная математика.* 2021. Т. 23, № 4. С. 39–53.

6. *Немиро В. В.* Эндоморфизмы полугрупп обратимых неотрицательных матриц над упорядоченными ассоциативными кольцами // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математики, механики.* 2020. № 5. С. 3–8.

7. *Семёнов П. П.* Эндоморфизмы полугрупп обратимых неотрицательных матриц над упорядоченными кольцами // *Фундаментальная и прикладная математика.* 2012. Т. 17, № 5. С. 165–178.

8. *Krylov P. A., Mikhalev A. V., and Tuganbaev A. A.* Endomorphism Rings of Abelian Groups // *Math. Sci.*. 2002. V. 110, N 3. P. 2683–2745.

9. *Жучок Ю. В.* Полугруппы эндоморфизмов некоторых свободных произведений // *Фундаментальная и прикладная математика.* 2012. Т. 17, № 3. С. 51–60.

10. *Табаров А. Х.* Гомоморфизмы и эндоморфизмы линейных и алинейных квазигрупп // *Дискретная математика.* 2007. Т. 19, № 2. С. 67–73.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 1, С. 73-95
Mat. Trudy, 2024, vol. 27, no. 1, pp. 73-95

11. *Тимофеенко Г. В., Глухов М. М.* Группа автоморфизмов конечно-определенных квазигрупп // *Математические заметки.* 1985. Т. 37, № 5. С. 617–626.

12. *Храмцов Д. Г.* Эндоморфизмы групп автоморфизмов свободных групп // *Алгебра и логика.* 2005. Т. 44, № 2. С. 211–237

13. *Ильиных А. П.* Классификация конечных группоидов с 2 транзитивной группой автоморфизмов // *Мат. сб.*. 1994. Т. 185, № 6. С. 51–78.

14. *Ильиных А. П.* Группоиды порядка $q(q \pm 1)/2$, $q = 2r$, имеющие группу автоморфизмов, изоморфную $SL(2, q)$ // *Сибирский математический журнал.* 1995. Т. 36, № 6. С. 1336–1341.

15. *Hobby D., Silberger D., and Silberger S.* Automorphism groups of finite groupoids // *Algebra Univers.* 2002. V. 64. P. 117–136.

16. *Литаврин А. В.* Эндоморфизмы конечных коммутативных группоидов, связанных с многослойными нейронными сетями прямого распределения // *Труды Института математики и механики УрО.* 2021. Т. 27, № 1. С. 130–145.

17. *Litavrin A. V.* On endomorphisms of the additive monoid of subnets of a two-layer neural network // *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics.* 2022. V. 39. P. 111–126.

18. *Litavrin A. V.* On Anti-endomorphisms of Groupoids // *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics.* 2023. V. 44. P. 82–97. (в печати, июнь 2023)

References

1. *Litavrin A. V.* On an element-by-element description of the monoid of all endomorphisms of an arbitrary groupoid and one classification of endomorphisms of a groupoid // *Tr. Inst. Mat. Mekh. (Ekaterinburg).* 2023. V. 29, N 1. P. 143–159.

2. *Levchuk V. M.* Automorphisms of unipotent subgroups of Chevalley groups // *Algebra i Logika.* 1990. V. 29, N 3. P. 315–338.

3. *Levchuk V. M.* Automorphisms of unipotent subgroups of lie type groups of small ranks // *Algebra i Logika.* 1990. V. 29, N 2. P. 141–161.

4. *Bunina E. I., Semenov P. P.* Automorphisms of the semigroup of invertible matrices with nonnegative elements over commutative partially ordered rings // *Fundam. Prikl. Mat.*. 2008. V. 14, N 2. P. 69–100.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 1, С. 73-95
Mat. Trudy, 2024, vol. 27, no. 1, pp. 73-95

5. *Bunina E. I., Sosov K.* Endomorphisms of semigroups of nonnegative invertible matrices of order two over commutative ordered rings // *Fundam. Prikl. Mat.*. 2021. V. 23, N 4. P. 39–53.

6. *Nemiro V. V.* Endomorphisms of semigroups of invertible nonnegative matrices over ordered associative rings // *Vestn. Mosk. Univ. Ser. 1. Mathematics, Mechanics.* 2020. N 5. P. 3–8.

7. *Semenov P. P.* Endomorphisms of semigroups of invertible nonnegative matrices over ordered rings // *Fundam. Prikl. Mat.*. 2012. V. 17, N 5. P. 165–178.

8. *Krylov P. A., Mikhalev A. V., and Tuganbaev A. A.* Endomorphism Rings of Abelian Groups // *Math. Sci.*. 2002. V. 110, N 3. P. 2683–2745.

9. *Zhuchok Yu. V.* Endomorphism semigroups of some free products // *Fundam. Prikl. Mat.*. 2012. V. 17, N 3. P. 51–60.

10. *Tabarov A. Kh.* Homomorphisms and endomorphisms of linear and alinear quasigroups // *Diskretn. Mat.*. 2007. V. 19, N 2. P. 67–73.

11. *Timofeenko G. V., Glukhov M. M.* Groups of automorphisms of finitely presented quasigroups // *Mat. Zametki.* 1985. V. 37, N 5. P. 617–626.

12. *Khramtsov D. G.* Endomorphisms of automorphism group of free group // *Algebra Logika.* 2005. N. 44, N 2. P. 211–237

13. *Il'inykh A. P.* Classification of finite groupoids with 2-transitive automorphism group // *Mat. Sb.* . 1994. V. 185, N 6. P. 51–78.

14. *Il'inykh A. P.* Groupoids of order $q(q \pm 1)/2$, $q = 2r$, with automorphism group isomorphic to $SL(2, q)$ // *Sib. Mat. Zh.*. 1995. V. 36, N 6. P. 1336–1341.

15. *Hobby D., Silberger D., and Silberger S.* Automorphism groups of finite groupoids // *Algebra Univers.* 2002. V. 64. P. 117–136.

16. *Litavrin A. V.* Endomorphisms of finite commutative groupoids related with multilayer feedforward neural networks // *Tr. Inst. Mat. Mekh. (Ekaterinburg).* 2021. V. 27, N 1. C. 130–145.

17. *Litavrin A. V.* On endomorphisms of the additive monoid of subnets of a two-layer neural network // *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics.* 2022. V. 39. P. 111–126.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 1, С. 73-95
Mat. Trudy, 2024, vol. 27, no. 1, pp. 73-95

18. *Litavrin A. V.* On Anti-endomorphisms of Groupoids // *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics.* 2023. V. 44. P. 82–97. (в печати, июнь 2023)

Информация об авторе

Литаврин Андрей Викторович, кандидат физико-математических наук, доцент
SPIN 6373-7957 AuthorID 924647
Scopus Author ID 57189711602

Information about the Author

Andrey V. Litavrin, Candidate of Mathematics, Associate Professor
SPIN 6373-7957 AuthorID 924647
Scopus Author ID 57189711602

*Статья поступила в редакцию 29.05.2023;
одобрена после рецензирования 30.12.2023; принята к публикации 17.05.2024*

*The article was submitted 29.05.2023;
approved after reviewing 30.12.2023; accepted for publication 17.05.2024*